Varianta 053

SUBIECTUL **I**

a) 3.
b) 0
c) $\frac{25}{2}$.
d) 5.
e) π.
f) $a=1$.

SUBIECTUL II
1.
a) 80.
b) 8.
c) $\frac{1}{9}$.
d) 0.
e) 572.
2.
a) $f'(x)=3x^2-1$.
b) $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ punct de maxim local.
$B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ punct de minim local.
c) 0.
d) 1.
e) $-\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL III

a) $f(2)=2a+b=5$
$f(3)=3a+b=8$.
$a=3;$ si $b=-1$.
b) $\mathbf{1}_{\mathbf{R}}(x)=1\cdot x+0\in G$.
c) $f\in G;$ atunci $f=ax+b,\ a,b\in\mathbf{R},\ a\neq 0$.
$g\in G;$ atunci $g=cx+d,\ c,d\in\mathbf{R},\ c\neq 0$.
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=acx+ad+b.$
Cum $a,c\neq 0$ rezultă $ac\neq 0$ iar $ad+b\in\mathbf{R}.$ Atunci $f\circ g\in G.$

d) $(f\circ 1_R)(x)=f(1_R(x))=f(x), \forall x\in \mathbf{R}.$ Deci $f\circ 1_R=f$

$(1_R\circ f)(x)=1_R(f(x))=f(x), \forall x\in \mathbf{R}.$

Deci $f\circ \mathbf{1_R}=\mathbf{1_R}\circ f=f$.

e) Fie $f=ax+b,\ a,b\in \mathbf{R},\ a\neq 0$ **.**

$g=cx+d,\ c,d\in \mathbf{R},\ c\neq 0$

Cum $f\circ g=1_R$ avem $(f\circ g)(x)=x$**,** sau $acx+ad+b=x$ sau

$x(ac-1)=-(ad+b)$, $\forall x\in$ **R**.

Atunci $ac-1=0$ si $ad+b=0.$ Obținem $c=\dfrac{1}{a}\neq 0$ si $d=-\dfrac{b}{a}$

Deci există $g\in G$ astfel incat $f\circ g=g\circ f=1_R,\ g(x)=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a}$.

f) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=2x+1;\ \ g:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ g(x)=3x+1;\ \ f,g\in G$ iar $f\circ g\neq g\circ f$

g) Din **c),** dacă $f,g\in G$ atunci $f\circ g\in G$.

Asociativitatea:

Fie $f,g,h:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \ f(x)=ax+b,\ a\neq 0,\ a,b\in \mathbf{R}.$

$g(x)=cx+d,\ c\neq 0,\ c,d\in \mathbf{R},\ \ h(x)=px+q,\ p\neq 0,\ p,q\in \mathbf{R}.$

$[(f\circ g)\circ h](x)=acpx+acq+ad+b$ **.**

$[f\circ(g\circ h)](x)=acpx+acq+ad+b$ **.**

Am obținut $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h), \forall f,g,h\in G$

Elementul neutru este 1_R (rezultă din **d))**

Elementul simetrizabil.

Din **e)** , rezultă că $\forall f\in G,$ există $g\in G$ astfel incat $f\circ g=g\circ f=1_R,\ g(x)=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a}$.

Din **f) ,** există $f,g\in G$ astfel incat $f\circ g\neq g\circ f$. Deci "$\circ$" nu este comutativă.

Am obținut astfel ca $(G,\circ)$ formează o structură de grup necomutativ.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=\ln x+1$

b) Din $f'(x)=0,\ \ x\in(0,\infty)$ avem $\ln x+1=0$ sau $x=e^{-1}$, $x=\dfrac{1}{e}\in(0,\infty)$.

c)

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	Min	$\nearrow$	

Obținem că f este strict crescătoare pe $\left[\dfrac{1}{e},\infty\right)$.

d) Din **c),** f este strict crescătoare pe $\left[\frac{1}{e},\infty\right)$ atunci $f\left(\frac{1}{e}\right)<f\left(\frac{2}{e}\right)$ adică $a<b$.

e) Din **c)** , obținem că $x_0=\frac{1}{e}$ este punct de minim local, adică $f(x)\geq f\left(\frac{1}{e}\right),\forall x\in(0,\infty)$

Obținem $1+e\cdot x\ln x\geq 0,\ \forall x\in(0,\infty)$.

f) $\int_1^e f(x)dx=\int_1^e x\ln x dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$.

g) Din **c),** avem că f este strict crescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{e},\infty\right)$.

Avem $f(2006)<f(2007)$. sau $F(2006)<F(2007)$.